Les fonctions logarithme au bac STI2D.

BAC STI2D, juin 2016.

Exercice 3 **4 points**

Quand l'oreille humaine est soumise à une intensité acoustique, exprimée en watts par mètre carré (W/m^2), le niveau sonore du bruit responsable de cette intensité acoustique est exprimé en décibels (dB).

Document

Échelle de bruit

Sources sonores	Intensité acoustique (W/m^2)	Niveau sonore arrondi éventuellement à l'unité	Sensation auditive
Décollage de la Fusée Ariane	10^6	180	Exige une protection spéciale
Turboréacteur	10^2	140	
Course de Formule 1	10	130	
Avion au décollage	1	120	Seuil de douleur
Concert et discothèque	10^{-1}	110	Très difficilement supportable
Baladeur à puissance maximum	10^{-2}	100	
Moto	10^{-5}	70	Pénible à entendre
Voiture au ralenti	10^{-7}	50	Bruit courant
Seuil d'audibilité	10^{-12}	0,08	Silence anormal

1. D'après le tableau, lorsque l'intensité acoustique est multipliée par 10, quelle semble être l'augmentation du niveau sonore ?
2. La relation liant l'intensité acoustique x où x appartient à l'intervalle $[10^{-12}; 10^6]$ et le niveau sonore est donnée par :

$$f(x) = \frac{10}{\ln 10} \times \ln(x) + 120.$$

On pourra prendre $\frac{10}{\ln 10} \approx 4,34$.

a. Vérifier la conjecture émise à la question 1.

b. Quel serait le niveau sonore de deux motos ?

3. Pour éviter tout risque sur la santé, le port d'un casque de protection acoustique est donc conseillé au delà de 85 dB. Déterminer l'intensité acoustique à partir de laquelle le port d'un tel casque est conseillé.

EXERCICE 2 **5 points**

Une équipe aérospatiale se propose d'envoyer un satellite de 10 tonnes en orbite autour de la Terre par l'intermédiaire d'une fusée à un seul étage. Cette fusée a une masse à vide, c'est-à-dire sans carburant ni satellite, de 40 tonnes.
L'éjection des gaz permet à la fusée de décoller et de s'élever dans les airs jusqu'à la consommation totale du propergol, carburant contenu dans ses réservoirs. La vitesse d'éjection des gaz est $V_e = 3200$ m.s^{-1}.
La vitesse finale de la fusée vitesse atteinte lorsque les réservoirs sont vides, varie en fonction de la masse de propergol contenue au départ dans les réservoirs. Elle doit être de 8000 m.s^{-1} pour permettre la mise en orbite souhaitée.
Le but de l'exercice est de déterminer la masse de propergol à mettre dans les réservoirs pour permettre cette mise en orbite du satellite.
On note x la masse, en tonnes, de propergol contenu au décollage dans les réservoirs de la fusée. La masse x est comprise entre 100 et 900 tonnes. La masse totale de la fusée est alors $(x+50)$ tonnes.
Il est établi que la vitesse finale de la fusée, $f(x)$, exprimée en m$\cdot$ s^{-1}, est donnée par

$$f(x) = V_e \times [\ln(x+50) - \ln 50]$$

où x est un réel de l'intervalle $[100\,;\,900]$.

1. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[100\,;\,900]$, $f(x) = 3200 \times \ln(0,02x+1)$.
   On pourra choisir l'une ou l'autre des expressions de $f(x)$ pour répondre à chacune des questions suivantes.
2. **a.** Si les réservoirs contiennent au décollage 100 tonnes de propergol, quelle sera la vitesse finale de la fusée ?
   b. Avec 400 tonnes de propergol au décollage la mise en orbite sera-t-elle possible ?
3. **a.** Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f.
4. Déterminer la masse de propergol à mettre dans les réservoirs pour permettre la mise en orbite souhaitée.

Corrections.

Juin 2016

EXERCICE 3 — 4 points

Quand l'oreille humaine est soumise à une intensité acoustique, exprimée en watts par mètre carré (W/m^2), le niveau sonore du bruit responsable de cette intensité acoustique est exprimé en décibels (dB).

Document

Échelle de bruit

Sources sonores	Intensité acoustique (W/m^2)	Niveau sonore arrondi éventuellement à l'unité	Sensation auditive
Décollage de la Fusée Ariane	10^6	180	Exige une protection spéciale
Turboréacteur	10^2	140	Exige une protection spéciale
Course de Formule 1	10	130	Exige une protection spéciale
Avion au décollage	1	120	Seuil de douleur
Concert et discothèque	10^{-1}	110	Très difficilement supportable
Baladeur à puissance maximum	10^{-2}	100	Très difficilement supportable
Moto	10^{-5}	70	Pénible à entendre
Voiture au ralenti	10^{-7}	50	Bruit courant
Seuil d'audibilité	10^{-12}	0,08	Silence anormal

1. Quand l'intensité acoustique passe de 1 à 10, le niveau sonore passe de 120 à 130; quand l'intensité passe de 10 à 100, le niveau sonore passe de 130 à 140.
   Il semble donc que quand l'intensité acoustique est multipliée par 10, le niveau sonore augmente de 10.

2. La relation liant l'intensité acoustique x où x appartient à l'intervalle $\left[10^{-12}; 10^6\right]$ et le niveau sonore est donnée par : $f(x) = \dfrac{10}{\ln(10)} \times \ln(x) + 120$. On pourra prendre $\dfrac{10}{\ln(10)} \approx 4{,}34$.

   a. $f(10x) = \dfrac{10}{\ln(10)} \times \ln(10x) + 120 = \dfrac{10}{\ln(10)}(\ln(10) + \ln(x)) + 120 = \dfrac{10}{\ln(10)} \times \ln(10) + \dfrac{10}{\ln(10)} \times \ln(x) + 120 = 10 + f(x)$
   La conjecture émise en question **1.** est donc vérifiée.

   b. L'intensité acoustique d'une moto est de 10^{-5} W/m^2 donc l'intensité acoustique de deux motos est de 2×10^{-5} W/m^2.
   Le niveau sonore de deux motos est donc : $f\left(2 \times 10^{-5}\right) \approx 73$ dB.

3. Pour éviter tout risque sur la santé, le port d'un casque de protection acoustique est donc conseillé au delà de 85 dB. L'intensité acoustique à partir de laquelle le port d'un tel casque est conseillé est le nombre x solution de l'inéquation $f(x) > 85$; on résout cette inéquation :
   $f(x) > 85 \iff \dfrac{10}{\ln(10)} \times \ln(x) + 120 > 85 \iff \dfrac{10}{\ln(10)} \times \ln(x) > -35 \iff \ln(x) > -35 \times \dfrac{\ln(10)}{10} \iff x > e^{-35 \times \frac{\ln(10)}{10}}$
   $e^{-35 \times \frac{\ln(10)}{10}} \approx 3{,}2 \times 10^{-4}$ donc à partir d'une intensité de $3{,}2 \times 10^{-4}$ W/m^2, le port d'un casque est conseillé.

Septembre 2014

1. Montrons que, pour tout réel x de l'intervalle $[100\,;\,900]$, $f(x) = 3200 \times \ln(0,02x+1)$.

   D'une part par hypothèse $V_e = 3200$, d'autre part $\ln(x+50) - \ln 50 = \ln \dfrac{x+50}{50} = \ln\left(\dfrac{1}{50}x+1\right) = \ln(0{,}02x+1)$.

   Nous avons bien $f(x) = 3200 \times \ln(0,02x+1)$.

   On pourra choisir l'une ou l'autre des expressions de $f(x)$ pour répondre à chacune des questions suivantes.

2. **a.** Si les réservoirs contiennent au décollage 100 tonnes de propergol, la vitesse finale de la fusée est donnée par $f(100)$. $\quad f(100) = 3200 \times \ln(2+1) = 3200 \times \ln 3 \approx 3515{,}56$
   La vitesse finale de la fusée est d'environ $3516\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

   b. Avec 400 tonnes de propergol au décollage, la vitesse finale de la fusée est donnée par $f(400)$.
   $f(400) = 3200 \times \ln(0,02 \times 400+1) = 3200 \times \ln(9) = 6400 \times \ln 3 \approx 7031{,}12$.
   Avec 400 tonnes de propergol au décollage, la vitesse finale de la fusée est d'environ $7031\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.
   Il en résulte que la mise en orbite n'est pas possible.

3. **a.** Calculons la fonction dérivée f' de la fonction f.
   En utilisant la première forme, $f'(x) = 3200 \times \dfrac{1}{x+50}$ car $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

   b. Déterminons le sens de variation de la fonction f.
   Étudions d'abord le signe de $f'(x)$. Pour tout $x \in [100\,;\,900]$, $f'(x) > 0$ comme produit et quotient de nombres réels strictement positifs.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I. La fonction f est par conséquent strictement croissante sur $[100\,;\,900]$.

4. Déterminons la masse de propergol à mettre dans les réservoirs pour permettre la mise en orbite souhaitée. Pour cela, la vitesse finale doit être de $8000\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
   Résolvons alors $f(x) = 8000$.

$$\begin{aligned} 3200 \times \ln(0,02x+1) &= 8000 \\ \ln(0,02x+1) &= 2{,}5 \\ 0,02x+1 &= e^{2,5} \\ 0,02x &= e^{2,5} - 1 \end{aligned}$$

   $x = 50(e^{2,5} - 1) \approx 559{,}125$.
   Pour permettre la mise en orbite souhaitée, la masse de propergol à mettre au départ doit être d'environ 560 tonnes.